

De ecuaciones a donas y de donas a un problema del milenio

Jorge Duque

Seminario No-Degenerado, Universidad de Talca

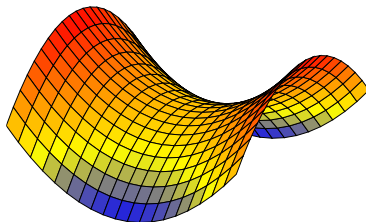
25 de septiembre de 2026

Topología



Espacios moldeables

Geometría Algebraica



$$z = x^2 - y^2$$

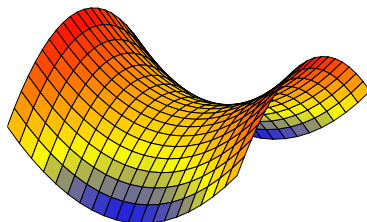
Espacios rígidos definidos por ecuaciones polinomiales.

Topología



Espacios moldeables

Geometría Algebraica



$$z = x^2 - y^2$$

Espacios rígidos definidos por ecuaciones polinomiales.

Pregunta Esencial

¿Bajo qué condiciones un subespacio topológico (con una forma arbitraria) resulta ser, en realidad, uno que puede describirse mediante ecuaciones polinomiales?

Pregunta: ¿Cuáles triángulos rectángulos tienen sus lados de longitud entera?

Pregunta: ¿Cuáles triángulos rectángulos tienen sus lados de longitud entera?

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$$

Pregunta: ¿Cuáles triángulos rectángulos tienen sus lados de longitud entera?

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$$

Pregunta: ¿Cuáles triángulos rectángulos tienen sus lados de longitud entera?

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$$

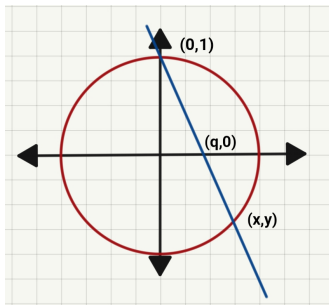
$$x^2 + y^2 = 1, \quad x, y \in \mathbb{Q}$$

Pregunta: ¿Cuáles triángulos rectángulos tienen sus lados de longitud entera?

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x, y \in \mathbb{Q}$$

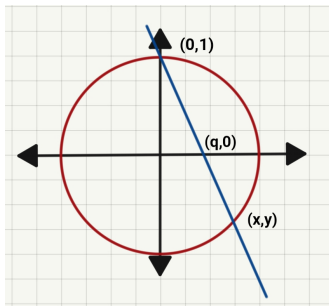


Pregunta: ¿Cuáles triángulos rectángulos tienen sus lados de longitud entera?

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x, y \in \mathbb{Q}$$



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \rightsquigarrow \text{Circulo} \\ \frac{y-1}{x} = \frac{-1}{q} & \rightsquigarrow \text{Recta} \end{cases}$$

Pregunta: ¿Cuáles triángulos rectángulos tienen sus lados de longitud entera?

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x, y \in \mathbb{Q}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \rightsquigarrow \text{Círculo} \\ \frac{y-1}{x} = \frac{-1}{q} & \rightsquigarrow \text{Recta} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{2q}{q^2 + 1}, y = \frac{q^2 - 1}{q^2 + 1}$$

Pregunta: ¿Cuáles triángulos rectángulos tienen sus lados de longitud entera?

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x, y \in \mathbb{Q}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \rightsquigarrow \text{Círculo} \\ \frac{y-1}{x} = \frac{-1}{q} & \rightsquigarrow \text{Recta} \end{cases}$$

$$\iff x = \frac{2q}{q^2 + 1}, y = \frac{q^2 - 1}{q^2 + 1}$$

$$q = \frac{u}{v}, \quad u, v \in \mathbb{Z}, (u, v) = 1$$

Pregunta: ¿Cuáles triángulos rectángulos tienen sus lados de longitud entera?

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x, y \in \mathbb{Q}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \rightsquigarrow \text{Círculo} \\ \frac{y-1}{x} = \frac{-1}{q} & \rightsquigarrow \text{Recta} \end{cases}$$

$$\iff x = \frac{2q}{q^2 + 1}, y = \frac{q^2 - 1}{q^2 + 1}$$

$$q = \frac{u}{v}, \quad u, v \in \mathbb{Z}, (u, v) = 1$$

$$(x, y) = \left(\frac{2uv}{u^2 + v^2}, \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2} \right)$$

Pregunta: ¿Cuáles triángulos rectángulos tienen sus lados de longitud entera?

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x, y \in \mathbb{Q}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & \rightsquigarrow \text{Círculo} \\ \frac{y-1}{x} = \frac{-1}{q} & \rightsquigarrow \text{Recta} \end{cases}$$

$$\iff x = \frac{2q}{q^2 + 1}, y = \frac{q^2 - 1}{q^2 + 1}$$

$$q = \frac{u}{v}, \quad u, v \in \mathbb{Z}, (u, v) = 1$$

$$(x, y) = \left(\frac{2uv}{u^2 + v^2}, \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2} \right)$$

$$(a, b, c) = (2uv, u^2 - v^2, u^2 + v^2)$$

Número congruente

Un número entero d se dice **congruente**

Número congruente

Un número entero d se dice **congruente** si existe un triángulo rectángulo con lados racionales cuya área es d ,

Un número entero d se dice **congruente** si existe un triángulo rectángulo con lados racionales cuya área es d , es decir:

$$d = \frac{ab}{2}, \quad a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Q}_{>0}$$

Un número entero d se dice **congruente** si existe un triángulo rectángulo con lados racionales cuya área es d , es decir:

$$d = \frac{ab}{2}, \quad a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Q}_{>0}$$

$$d = 6, (a, b, c) = (3, 4, 5)$$

Un número entero d se dice **congruente** si existe un triángulo rectángulo con lados racionales cuya área es d , es decir:

$$d = \frac{ab}{2}, \quad a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Q}_{>0}$$

$$d = 5, (a, b, c) = \left(\frac{3}{2}, \frac{20}{3}, \frac{41}{6} \right)$$

Número congruente

Un número entero d se dice **congruente** si existe un triángulo rectángulo con lados racionales cuya área es d , es decir:

$$d = \frac{ab}{2}, \quad a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Q}_{>0}$$

Pregunta: ¿Cuáles son los números congruentes?

Número congruente

Un número entero d se dice **congruente** si existe un triángulo rectángulo con lados racionales cuya área es d , es decir:

$$d = \frac{ab}{2}, \quad a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Q}_{>0}$$

Pregunta: ¿Cuáles son los números congruentes? **ABIERTA!**

Un número entero d se dice **congruente** si existe un triángulo rectángulo con lados racionales cuya área es d , es decir:

$$d = \frac{ab}{2}, \quad a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Q}_{>0}$$

Pregunta: ¿Cuáles son los números congruentes? **ABIERTA!**

$$\{(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3 \mid a^2 + b^2 = c^2, \frac{ab}{2} = d\} \iff \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid y^2 = x(x-d)(x+d)\}$$

Un número entero d se dice **congruente** si existe un triángulo rectángulo con lados racionales cuya área es d , es decir:

$$d = \frac{ab}{2}, \quad a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Q}_{>0}$$

Pregunta: ¿Cuáles son los números congruentes? **ABIERTA!**

$$\begin{aligned} \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{Q}^3 \mid a^2 + b^2 = c^2, \frac{ab}{2} = d \right\} &\iff \left\{ (x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid y^2 = x(x-d)(x+d) \right\} \\ (a, b, c) &\implies \left(\frac{db}{c-a}, \frac{2d^2}{c-a} \right) \end{aligned}$$

Número congruente

Un número entero d se dice **congruente** si existe un triángulo rectángulo con lados racionales cuya área es d , es decir:

$$d = \frac{ab}{2}, \quad a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Q}_{>0}$$

Pregunta: ¿Cuáles son los números congruentes? **ABIERTA!**

$$\begin{array}{ccc} \{(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3 \mid a^2 + b^2 = c^2, \frac{ab}{2} = d\} & \iff & \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid y^2 = x(x-d)(x+d)\} \\ (a, b, c) & \implies & \left(\frac{db}{c-a}, \frac{2d^2}{c-a}\right) \\ \left(\frac{x^2-d^2}{y}, \frac{2dx}{y}, \frac{x^2+d^2}{y}\right) & \longleftarrow & (x, y) \end{array}$$

Un número entero d se dice **congruente** si existe un triángulo rectángulo con lados racionales cuya área es d , es decir:

$$d = \frac{ab}{2}, \quad a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Q}_{>0}$$

Pregunta: ¿Cuáles son los números congruentes? **ABIERTA!**

$$\begin{aligned} \{(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3 \mid a^2 + b^2 = c^2, \frac{ab}{2} = d\} &\iff \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid y^2 = x(x-d)(x+d)\} \\ (a, b, c) &\implies \left(\frac{db}{c-a}, \frac{2d^2}{c-a}\right) \\ \left(\frac{x^2-d^2}{y}, \frac{2dx}{y}, \frac{x^2+d^2}{y}\right) &\longleftarrow (x, y) \end{aligned}$$

$$y^2 = p(x), \quad \deg(p) = 3, \quad p(x) \in \mathbb{Q}[x] \rightsquigarrow \text{Curva elíptica}$$

Número congruente

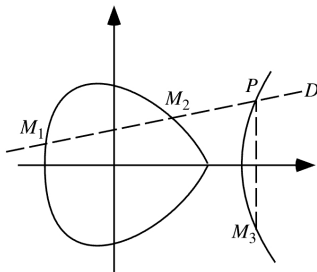
Un número entero d se dice **congruente** si existe un triángulo rectángulo con lados racionales cuya área es d , es decir:

$$d = \frac{ab}{2}, \quad a^2 + b^2 = c^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Q}_{>0}$$

Pregunta: ¿Cuáles son los números congruentes? **ABIERTA!**

$$\begin{aligned} \{(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3 \mid a^2 + b^2 = c^2, \frac{ab}{2} = d\} &\iff \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid y^2 = x(x-d)(x+d)\} \\ (a, b, c) &\implies \left(\frac{db}{c-a}, \frac{2d^2}{c-a}\right) \\ \left(\frac{x^2-d^2}{y}, \frac{2dx}{y}, \frac{x^2+d^2}{y}\right) &\longleftarrow (x, y) \end{aligned}$$

$$y^2 = p(x), \quad \deg(p) = 3, \quad p(x) \in \mathbb{Q}[x] \rightsquigarrow \text{Curva elíptica}$$



$$y^2 = p(x), \quad \deg(p) = 3, \quad p(x) \in \mathbb{Q}[x] \rightsquigarrow \textbf{Curva elíptica}$$

$$y^2 = p(x), \quad \deg(p) = 3, \quad p(x) \in \mathbb{Q}[x] \rightsquigarrow \text{Curva elíptica}$$

Pregunta: ¿Podemos resolver estas ecuaciones?

$$y^2 = p(x), \quad \deg(p) = 3, \quad p(x) \in \mathbb{Q}[x] \rightsquigarrow \text{Curva elíptica}$$

Pregunta: ¿Podemos resolver estas ecuaciones? **NO** en general

$$y^2 = p(x), \quad \deg(p) = 3, \quad p(x) \in \mathbb{Q}[x] \rightsquigarrow \text{Curva elíptica}$$

Pregunta: ¿Podemos resolver estas ecuaciones? **NO** en general (**conjetura Birch y Swinnerton-Dyer**)

$$y^2 = p(x), \quad \deg(p) = 3, \quad p(x) \in \mathbb{Q}[x] \rightsquigarrow \text{Curva elíptica}$$

Pregunta: ¿Podemos resolver estas ecuaciones? **NO** en general (**conjetura Birch y Swinnerton-Dyer**)

Pregunta: ¿Cuántas soluciones racionales tiene?

$$y^2 = p(x), \quad \deg(p) = 3, \quad p(x) \in \mathbb{Q}[x] \rightsquigarrow \text{Curva elíptica}$$

Pregunta: ¿Podemos resolver estas ecuaciones? **NO** en general (**conjetura Birch y Swinnerton-Dyer**)

Pregunta: ¿Cuántas soluciones racionales tiene? Puede no tener, puede tener un número finito o infinitas soluciones.

$$y^2 = p(x), \quad \deg(p) = 3, \quad p(x) \in \mathbb{Q}[x] \rightsquigarrow \text{Curva elíptica}$$

Pregunta: ¿Podemos resolver estas ecuaciones? **NO** en general (**conjetura Birch y Swinnerton-Dyer**)

Pregunta: ¿Cuántas soluciones racionales tiene? Puede no tener, puede tener un número finito o infinitas soluciones.

$$y^2 = x^3 - 17 \text{ No tiene soluciones racionales}$$

$$y^2 = p(x), \quad \deg(p) = 3, \quad p(x) \in \mathbb{Q}[x] \rightsquigarrow \text{Curva elíptica}$$

Pregunta: ¿Podemos resolver estas ecuaciones? **NO** en general (**conjetura Birch y Swinnerton-Dyer**)

Pregunta: ¿Cuántas soluciones racionales tiene? Puede no tener, puede tener un número finito o infinitas soluciones.

$$y^2 = x^3 - 17 \text{ No tiene soluciones racionales}$$

$$y^2 = x(x-1)(x+1) \text{ únicas soluciones las triviales}$$

$$y^2 = p(x), \quad \deg(p) = 3, \quad p(x) \in \mathbb{Q}[x] \rightsquigarrow \text{Curva elíptica}$$

Pregunta: ¿Podemos resolver estas ecuaciones? **NO** en general (**conjetura Birch y Swinnerton-Dyer**)

Pregunta: ¿Cuántas soluciones racionales tiene? Puede no tener, puede tener un número finito o infinitas soluciones.

$$y^2 = x^3 - 17 \text{ No tiene soluciones racionales}$$

$$y^2 = x(x-1)(x+1) \text{ únicas soluciones las triviales}$$

$$y^2 = x(x-5)(x+5) \text{ infinitas soluciones}$$

$$y^2 = p(x), \deg(p) = 3, p(x) \in \mathbb{Q}[x] \rightsquigarrow \text{Curva elíptica}$$

Pregunta: ¿Podemos resolver estas ecuaciones? **NO** en general (**conjetura Birch y Swinnerton-Dyer**)

Pregunta: ¿Cuántas soluciones racionales tiene? Puede no tener, puede tener un número finito o infinitas soluciones.

$$y^2 = x^3 - 17 \text{ No tiene soluciones racionales}$$

$$y^2 = x(x-1)(x+1) \text{ únicas soluciones las triviales}$$

$$y^2 = x(x-5)(x+5) \text{ infinitas soluciones}$$

Pregunta: ¿Podemos parametrizarlas?

$$y^2 = p(x), \deg(p) = 3, p(x) \in \mathbb{Q}[x] \rightsquigarrow \text{Curva elíptica}$$

Pregunta: ¿Podemos resolver estas ecuaciones? **NO** en general (**conjetura Birch y Swinnerton-Dyer**)

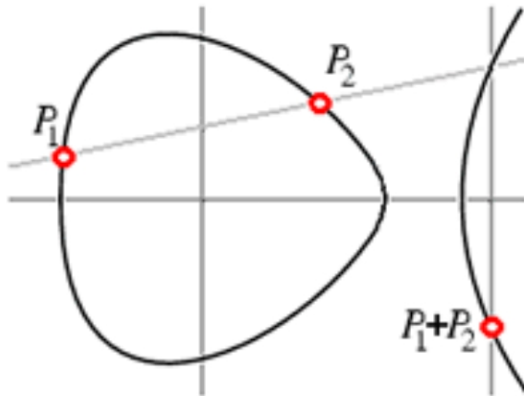
Pregunta: ¿Cuántas soluciones racionales tiene? Puede no tener, puede tener un número finito o infinitas soluciones.

$$y^2 = x^3 - 17 \text{ No tiene soluciones racionales}$$

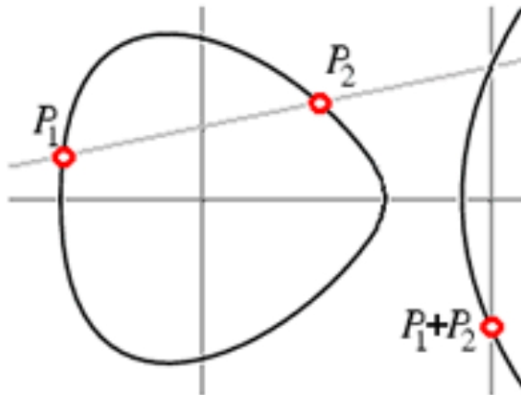
$$y^2 = x(x-1)(x+1) \text{ únicas soluciones las triviales}$$

$$y^2 = x(x-5)(x+5) \text{ infinitas soluciones}$$

Pregunta: ¿Podemos parametrizarlas? **NO!**

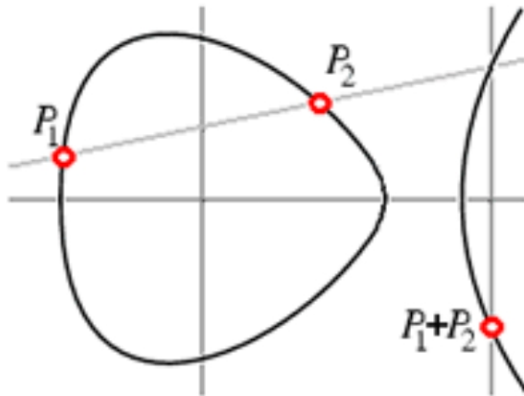


Teorema (Teorema de Mordell-Weil)



Teorema (Teorema de Mordell-Weil)

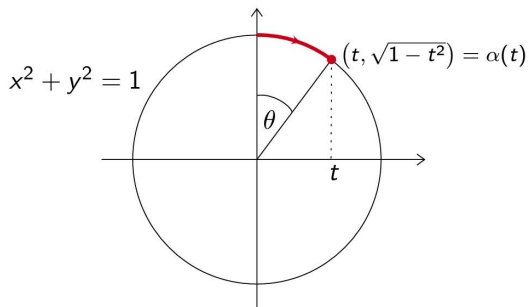
Las soluciones racionales de una curva elíptica forman un grupo abeliano finitamente generado.

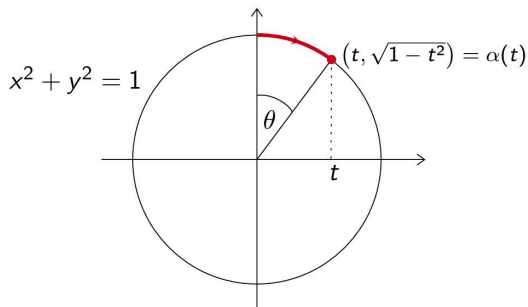


Teorema (Teorema de Mordell-Weil)

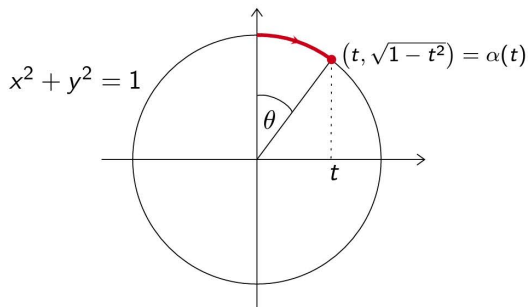
Las soluciones racionales de una curva elíptica forman un grupo abeliano finitamente generado.

$$E(\mathbb{Q}) \simeq G \oplus \mathbb{Z}^r, G \text{ finito}$$

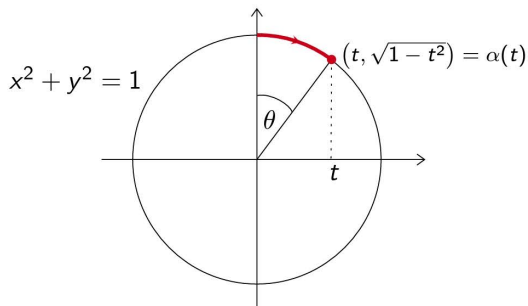




$$\theta(t) = \int_0^t |\alpha'(x)| dx =$$

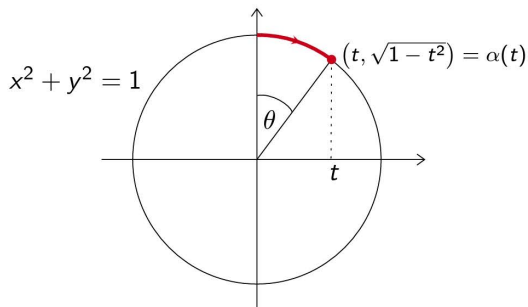


$$\theta(t) = \int_0^t |\alpha'(x)| dx = \int_0^t \left| \left(1, \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \right) \right| dx$$



$$\theta(t) = \int_0^t |\alpha'(x)| dx = \int_0^t \left| \left(1, \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \right) \right| dx$$

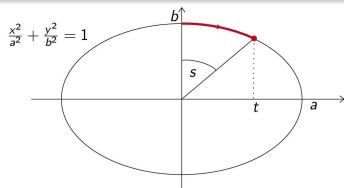
$$\theta(t) = \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$



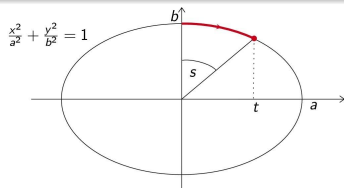
$$\theta(t) = \int_0^t |\alpha'(x)| dx = \int_0^t \left| \left(1, \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \right) \right| dx$$

$$\theta(t) = \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(t)$$

Longitud de arco: El origen de las integrales elípticas/abelianas

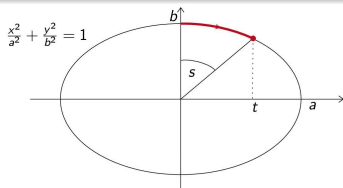


Longitud de arco: El origen de las integrales elípticas/abelianas



$$\alpha(t) = \left(t, \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - t^2} \right)$$

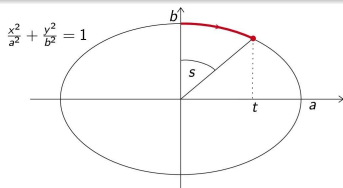
Longitud de arco: El origen de las integrales elípticas/abelianas



$$\alpha(t) = \left(t, \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - t^2} \right)$$

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(x)| dx$$

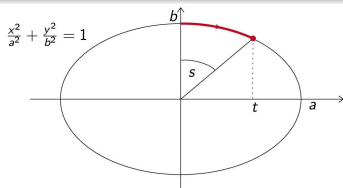
Longitud de arco: El origen de las integrales elípticas/abelianas



$$\alpha(t) = \left(t, \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - t^2} \right)$$

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(x)| dx = \int_0^t \frac{(a^2 - k^2 x^2) dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - k^2 x^2)}}, \quad k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

Longitud de arco: El origen de las integrales elípticas/abelianas

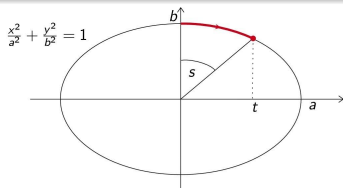


$$\alpha(t) = \left(t, \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - t^2} \right)$$

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(x)| dx = \int_0^t \frac{(a^2 - k^2 x^2) dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - k^2 x^2)}}, \quad k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

Pregunta: ¿Será posible expresar $s(t)$ mediante funciones conocidas (funciones elementales)?

Longitud de arco: El origen de las integrales elípticas/abelianas

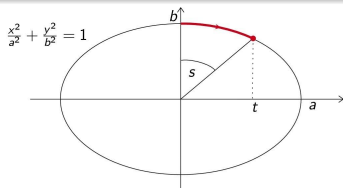


$$\alpha(t) = \left(t, \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - t^2} \right)$$

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(x)| dx = \int_0^t \frac{(a^2 - k^2 x^2) dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - k^2 x^2)}}, \quad k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

Pregunta: ¿Será posible expresar $s(t)$ mediante funciones conocidas (funciones elementales)? **NO!**

Longitud de arco: El origen de las integrales elípticas/abelianas



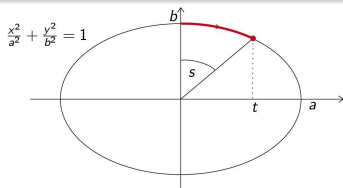
$$\alpha(t) = \left(t, \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - t^2} \right)$$

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(x)| dx = \int_0^t \frac{(a^2 - k^2 x^2) dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - k^2 x^2)}}, \quad k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

Pregunta: ¿Será posible expresar $s(t)$ mediante funciones conocidas (funciones elementales)? **NO!**

Integrales **Elípticas/Abelianas**:

Longitud de arco: El origen de las integrales elípticas/abelianas



$$\alpha(t) = \left(t, \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - t^2} \right)$$

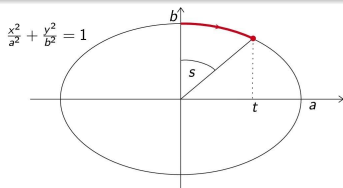
$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(x)| dx = \int_0^t \frac{(a^2 - k^2 x^2) dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - k^2 x^2)}}, \quad k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

Pregunta: ¿Será posible expresar $s(t)$ mediante funciones conocidas (funciones elementales)? **NO!**

Integrales **Elípticas/Abelianas**:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{p(x)}}, \quad \deg(p) = 3, 4$$

Longitud de arco: El origen de las integrales elípticas/abelianas



$$\alpha(t) = \left(t, \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - t^2} \right)$$

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(x)| dx = \int_0^t \frac{(a^2 - k^2 x^2) dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - k^2 x^2)}}, \quad k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

Pregunta: ¿Será posible expresar $s(t)$ mediante funciones conocidas (funciones elementales)? **NO!**

Integrales **Elípticas/Abelianas**:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{p(x)}}, \quad \deg(p) = 3, 4$$

$$\int R(x, w) dx, \quad F(x, w) = 0$$

$$\theta(t) = \int_0^t \frac{dz}{\sqrt{p(z)}}, \quad t \in \mathbb{C}$$

$$\theta(t) = \int_0^t \frac{dz}{\sqrt{p(z)}}, \quad t \in \mathbb{C}$$

$$\sqrt{p(z)} = \exp\left(\frac{1}{2} \log(p(z))\right) = \exp\left(\frac{1}{2} \int_{z_0}^z (\log(p(x)))' dx\right)$$

$$\theta(t) = \int_0^t \frac{dz}{\sqrt{p(z)}}, \quad t \in \mathbb{C}$$

$$\sqrt{p(z)} = \exp\left(\frac{1}{2} \log(p(z))\right) = \exp\left(\frac{1}{2} \int_{z_0}^z (\log(p(x)))' dx\right)$$

$$\sqrt{p(x)} = \exp\left(\frac{1}{2} \int_{z_0}^z \frac{p'(x) dx}{p(x)}\right)$$

$$\theta(t) = \int_0^t \frac{dz}{\sqrt{p(z)}}, \quad t \in \mathbb{C}$$

$$\sqrt{p(z)} = \exp\left(\frac{1}{2} \log(p(z))\right) = \exp\left(\frac{1}{2} \int_{z_0}^z (\log(p(x)))' dx\right)$$

$$\sqrt{p(x)} = \exp\left(\frac{1}{2} \int_{z_0}^z \frac{p'(x) dx}{p(x)}\right)$$

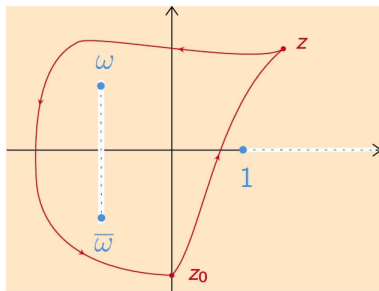
Ejemplo: $p(z) = 1 - z^3$

$$\theta(t) = \int_0^t \frac{dz}{\sqrt{p(z)}}, \quad t \in \mathbb{C}$$

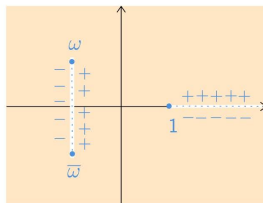
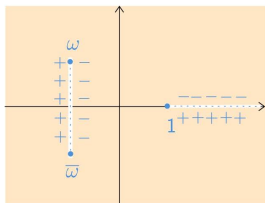
$$\sqrt{p(z)} = \exp\left(\frac{1}{2} \log(p(z))\right) = \exp\left(\frac{1}{2} \int_{z_0}^z (\log(p(x)))' dx\right)$$

$$\sqrt{p(x)} = \exp\left(\frac{1}{2} \int_{z_0}^z \frac{p'(x) dx}{p(x)}\right)$$

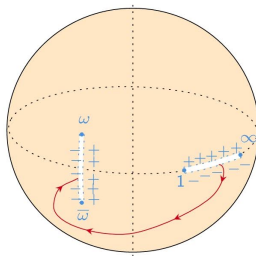
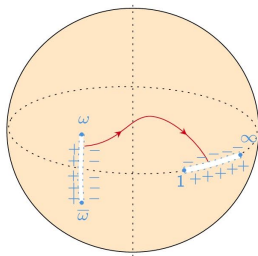
Ejemplo: $p(z) = 1 - z^3$



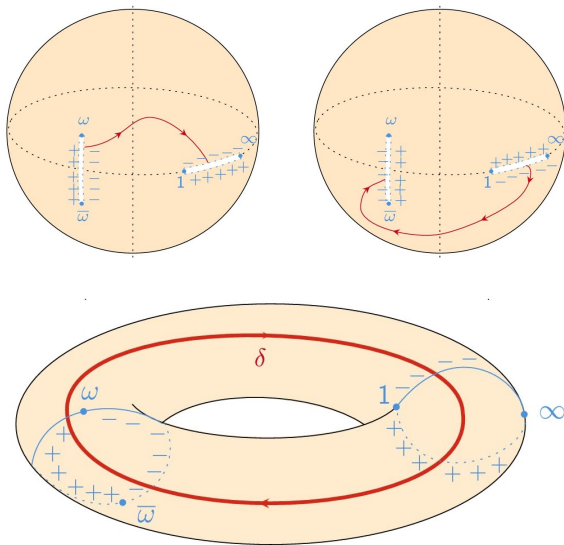
Hacia las superficies de Riemann



Hacia las superficies de Riemann

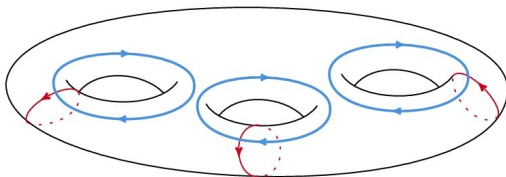


Hacia las superficies de Riemann

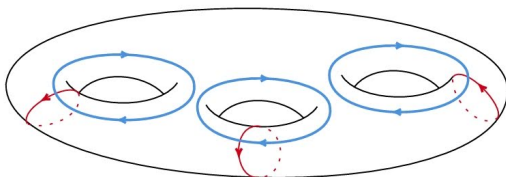


En general, el dominio de $\int \frac{dz}{\sqrt{p(z)}} = \int \frac{dz}{y}$ con $y^2 = p(z)$ es

En general, el dominio de $\int \frac{dz}{\sqrt{p(z)}} = \int \frac{dz}{y}$ con $y^2 = p(z)$ es

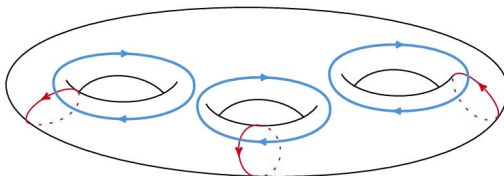


En general, el dominio de $\int \frac{dz}{\sqrt{p(z)}} = \int \frac{dz}{y}$ con $y^2 = p(z)$ es



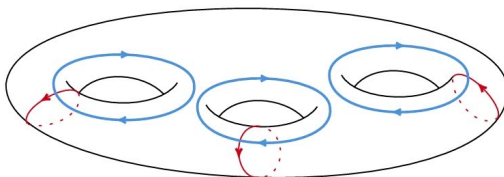
El número de integrales independientes es $2g$,

En general, el dominio de $\int \frac{dz}{\sqrt{p(z)}} = \int \frac{dz}{y}$ con $y^2 = p(z)$ es

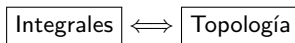


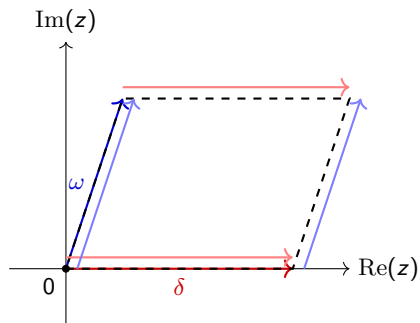
El número de integrales independientes es $2g$, donde g es el **género** de la superficie de Riemann

En general, el dominio de $\int \frac{dz}{\sqrt{p(z)}} = \int \frac{dz}{y}$ con $y^2 = p(z)$ es



El número de integrales independientes es $2g$, donde g es el **género** de la superficie de Riemann





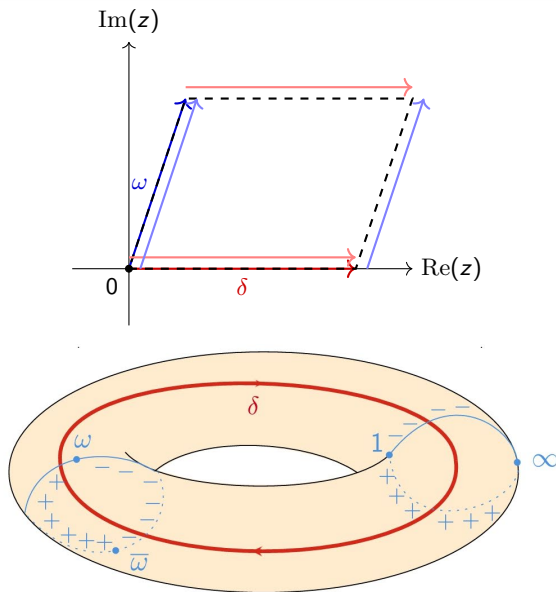
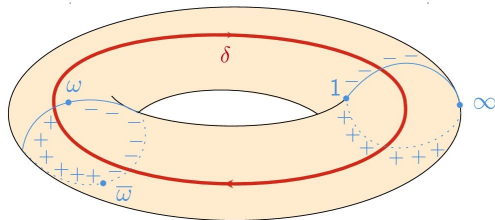
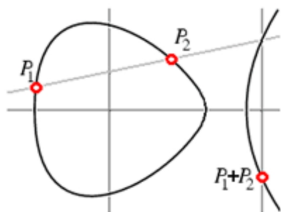


Figura: $T = \mathbb{C}/\Lambda$

¿Curva elíptica o toro complejo? ¡Es lo mismo!



¿Dónde está la información compleja del toro?

Sea $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^2$ un reticulado. Al complexificarlo obtenemos

$$\Lambda_{\mathbb{C}} = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^2.$$

¿Dónde está la información compleja del toro?

Sea $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^2$ un reticulado. Al complexificarlo obtenemos

$$\Lambda_{\mathbb{C}} = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^2.$$

Ahora elegimos una recta compleja

$$H^{1,0} \subset \mathbb{C}^2$$

tal que

$$\mathbb{C}^2 = H^{1,0} \oplus \overline{H^{1,0}}.$$

¿Dónde está la información compleja del toro?

Sea $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^2$ un reticulado. Al complexificarlo obtenemos

$$\Lambda_{\mathbb{C}} = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^2.$$

Ahora elegimos una recta compleja

$$H^{1,0} \subset \mathbb{C}^2$$

tal que

$$\mathbb{C}^2 = H^{1,0} \oplus \overline{H^{1,0}}.$$

No toda recta compleja sirve.

¿Dónde está la información compleja del toro?

Sea $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^2$ un reticulado. Al complexificarlo obtenemos

$$\Lambda_{\mathbb{C}} = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^2.$$

Ahora elegimos una recta compleja

$$H^{1,0} \subset \mathbb{C}^2$$

tal que

$$\mathbb{C}^2 = H^{1,0} \oplus \overline{H^{1,0}}.$$

No toda recta compleja sirve.

$$\begin{array}{ccc} \Lambda \hookrightarrow & H^{1,0} \oplus H^{0,1} & H^{0,1} := \overline{H^{1,0}} \\ & \downarrow \pi_{1,0} & \\ & H^{1,0} & \end{array}$$

$\swarrow \pi_{1,0}$

¿Dónde está la información compleja del toro?

Sea $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^2$ un reticulado. Al complexificarlo obtenemos

$$\Lambda_{\mathbb{C}} = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^2.$$

Ahora elegimos una recta compleja

$$H^{1,0} \subset \mathbb{C}^2$$

tal que

$$\mathbb{C}^2 = H^{1,0} \oplus \overline{H^{1,0}}.$$

No toda recta compleja sirve.

$$\begin{array}{ccc} \Lambda \hookrightarrow & H^{1,0} \oplus H^{0,1} & H^{0,1} := \overline{H^{1,0}} \\ & \downarrow \pi_{1,0} & \\ & H^{1,0} & \end{array}$$

$\swarrow \pi_{1,0}$

$$T \simeq \frac{H^{1,0}}{\pi_{1,0}(\Lambda)}$$

¿Dónde está la información compleja del toro?

Sea $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^2$ un reticulado. Al complexificarlo obtenemos

$$\Lambda_{\mathbb{C}} = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^2.$$

Ahora elegimos una recta compleja

$$H^{1,0} \subset \mathbb{C}^2$$

tal que

$$\mathbb{C}^2 = H^{1,0} \oplus \overline{H^{1,0}}.$$

No toda recta compleja sirve.

$$\begin{array}{ccc} \Lambda \hookrightarrow & H^{1,0} \oplus H^{0,1} & H^{0,1} := \overline{H^{1,0}} \\ & \downarrow \pi_{1,0} & \\ & H^{1,0} & \end{array}$$

$\swarrow \pi_{1,0}$

$$T \simeq \frac{H^{1,0}}{\pi_{1,0}(\Lambda)}$$

La elección de $H^{1,0}$ nos permite recuperar la estructura compleja del toro.

Pregunta: ¿Qué estructura adicional puedo poner sobre un reticulado/espacio vectorial para que contenga suficiente riqueza que me permita recuperar información geométrica que lo originó?

Pregunta: ¿Qué estructura adicional puedo poner sobre un reticulado/espacio vectorial para que contenga suficiente riqueza que me permita recuperar información geométrica que lo originó?

Definición

Sea Λ un reticulado. Una **estructura de Hodge** de peso k es una descomposición

$$\Lambda_{\mathbb{C}} = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}, \quad \overline{H^{p,q}} = H^{q,p}.$$

Pregunta: ¿Qué estructura adicional puedo poner sobre un reticulado/espacio vectorial para que contenga suficiente riqueza que me permita recuperar información geométrica que lo originó?

Definición

Sea Λ un reticulado. Una **estructura de Hodge** de peso k es una descomposición

$$\Lambda_{\mathbb{C}} = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}, \quad \overline{H^{p,q}} = H^{q,p}.$$

Ejemplo: Toros complejos

$$T = \mathbb{C}^g / \Lambda \quad \Longleftrightarrow \quad \Lambda_{\mathbb{C}} = H^{1,0} \oplus H^{0,1}, \quad \overline{H^{1,0}} = H^{0,1}.$$

Pregunta: ¿Qué estructura adicional puedo poner sobre un reticulado/espacio vectorial para que contenga suficiente riqueza que me permita recuperar información geométrica que lo originó?

Definición

Sea Λ un reticulado. Una **estructura de Hodge** de peso k es una descomposición

$$\Lambda_{\mathbb{C}} = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}, \quad \overline{H^{p,q}} = H^{q,p}.$$

Ejemplo: Toros complejos

$$T = \mathbb{C}^g / \Lambda \quad \Longleftrightarrow \quad \Lambda_{\mathbb{C}} = H^{1,0} \oplus H^{0,1}, \quad \overline{H^{1,0}} = H^{0,1}.$$

$$T \simeq \frac{H^{1,0}}{\pi_{1,0}(\Lambda)}.$$

Pregunta: ¿Qué estructura adicional puedo poner sobre un reticulado/espacio vectorial para que contenga suficiente riqueza que me permita recuperar información geométrica que lo originó?

Definición

Sea Λ un reticulado. Una **estructura de Hodge** de peso k es una descomposición

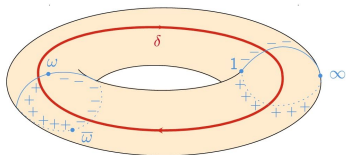
$$\Lambda_{\mathbb{C}} = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}, \quad \overline{H^{p,q}} = H^{q,p}.$$

Ejemplo: Toros complejos

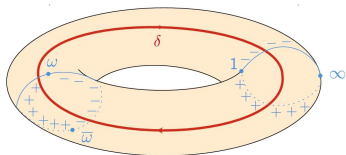
$$T = \mathbb{C}^g / \Lambda \quad \Longleftrightarrow \quad \Lambda_{\mathbb{C}} = H^{1,0} \oplus H^{0,1}, \quad \overline{H^{1,0}} = H^{0,1}.$$

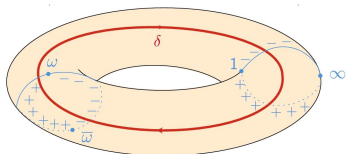
$$T \simeq \frac{H^{1,0}}{\pi_{1,0}(\Lambda)}.$$

La estructura de Hodge recuerda la estructura compleja del toro.



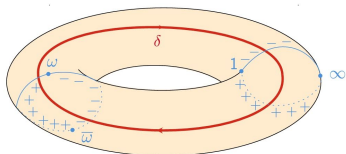
Homología $H_k(X)$: Los objetos geométricos adecuados sobre los cuales podemos integrar (ciclos δ).





Homología $H_k(X)$: Los objetos geométricos adecuados sobre los cuales podemos integrar (ciclos δ).

Cohomología $H^k(X)$: Las funciones generalizadas que se pueden integrar sobre dichos objetos (formas diferenciales η).

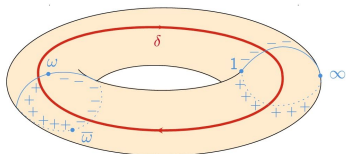


Homología $H_k(X)$: Los objetos geométricos adecuados sobre los cuales podemos integrar (ciclos δ).

Cohomología $H^k(X)$: Las funciones generalizadas que se pueden integrar sobre dichos objetos (formas diferenciales η).

Periodos

$$(\delta, \eta) \mapsto \int_{\delta} \eta$$



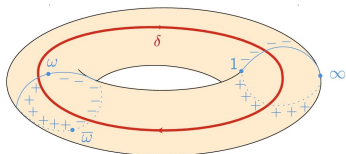
Homología $H_k(X)$: Los objetos geométricos adecuados sobre los cuales podemos integrar (ciclos δ).

Cohomología $H^k(X)$: Las funciones generalizadas que se pueden integrar sobre dichos objetos (formas diferenciales η).

Periodos

$$(\delta, \eta) \mapsto \int_{\delta} \eta$$

$$H^k(X, \mathbb{C}) \simeq \text{Hom}(H_k(X, \mathbb{C}), \mathbb{C}), \quad [\eta] \mapsto \left(\delta \mapsto \int_{\delta} \eta \right)$$



Homología $H_k(X)$: Los objetos geométricos adecuados sobre los cuales podemos integrar (ciclos δ).

Cohomología $H^k(X)$: Las funciones generalizadas que se pueden integrar sobre dichos objetos (formas diferenciales η).

Periodos

$$(\delta, \eta) \mapsto \int_{\delta} \eta$$

$$H^k(X, \mathbb{C}) \simeq \text{Hom}(H_k(X, \mathbb{C}), \mathbb{C}), \quad [\eta] \mapsto \left(\delta \mapsto \int_{\delta} \eta \right)$$

Descomposición de Hodge

Si X es una variedad proyectiva suave,

$$H^k(X, \mathbb{C}) \simeq H^k(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X), \quad \overline{H^{p,q}(X)} = H^{q,p}(X)$$

¿Cuánta geometría recuerdan los periodos?

$$\boxed{X} \longrightarrow \boxed{H^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X)}$$

$$\boxed{X} \longrightarrow \boxed{H^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X)}$$

Filosofía: La Estructura de Hodge es una “**sombra**” de X que podemos observar a través de sus periodos.

$$\boxed{X} \longrightarrow \boxed{H^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X)}$$

Filosofía: La Estructura de Hodge es una “**sombra**” de X que podemos observar a través de sus periodos.

Pregunta: ¿Cuánta información de X quedó guardada en esta sombra?

¿Cuánta geometría recuerdan los periodos?

$$\boxed{X} \longrightarrow \boxed{H^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X)}$$

Filosofía: La Estructura de Hodge es una “**sombra**” de X que podemos observar a través de sus periodos.

Pregunta: ¿Cuánta información de X quedó guardada en esta sombra?

Fenómenos de Torelli

En algunos casos, esta información permite recuperar la geometría original.

Curvas

Variedades Abelianas

Superficies K3

$$\delta \in H_{2(n-k)}(X, \mathbb{Q}).$$

$$[\delta] \in H^{k,k}(X) \cap H^{2k}(X, \mathbb{Q}) \rightsquigarrow \text{clase de Hodge.}$$

$$\delta \in H_{2(n-k)}(X, \mathbb{Q}).$$

$$[\delta] \in H^{k,k}(X) \cap H^{2k}(X, \mathbb{Q}) \rightsquigarrow \text{clase de Hodge.}$$

$$\delta \text{ es de Hodge} \iff \int_{\delta} \eta = 0 \quad \text{para todas las formas de tipo "incorrecto".}$$

$$\delta \in H_{2(n-k)}(X, \mathbb{Q}).$$

$$[\delta] \in H^{k,k}(X) \cap H^{2k}(X, \mathbb{Q}) \rightsquigarrow \text{clase de Hodge.}$$

δ es de Hodge $\iff \int_{\delta} \eta = 0$ para todas las formas de tipo “incorrecto”.

$$\int_{\delta} \omega = 0, \quad \forall \eta \in H^{p, 2(n-k)-p}(X), \quad p \neq n - k.$$

$$\delta \in H_{2(n-k)}(X, \mathbb{Q}).$$

$$[\delta] \in H^{k,k}(X) \cap H^{2k}(X, \mathbb{Q}) \rightsquigarrow \text{clase de Hodge.}$$

$$\delta \text{ es de Hodge} \iff \int_{\delta} \eta = 0 \quad \text{para todas las formas de tipo "incorrecto".}$$

¡Condiciones expresadas mediante periodos, típicamente cantidades altamente trascendentales!

$$\delta \in H_{2(n-k)}(X, \mathbb{Q}).$$

$$[\delta] \in H^{k,k}(X) \cap H^{2k}(X, \mathbb{Q}) \rightsquigarrow \text{clase de Hodge.}$$

$$\delta \text{ es de Hodge} \iff \int_{\delta} \eta = 0 \quad \text{para todas las formas de tipo "incorrecto".}$$

¡Condiciones expresadas mediante periodos, típicamente cantidades altamente trascendentales!

Pero si $Y \subset X$ es una subvariedad algebraica de codimensión k ,

$$Y \text{ algebraica} \implies [Y] \text{ es una clase de Hodge.}$$

$$\delta \in H_{2(n-k)}(X, \mathbb{Q}).$$

$$[\delta] \in H^{k,k}(X) \cap H^{2k}(X, \mathbb{Q}) \rightsquigarrow \text{clase de Hodge.}$$

$$\delta \text{ es de Hodge} \iff \int_{\delta} \eta = 0 \quad \text{para todas las formas de tipo "incorrecto".}$$

¡Condiciones expresadas mediante periodos, típicamente cantidades altamente trascendentales!

Pero si $Y \subset X$ es una subvariedad algebraica de codimensión k ,

$$Y \text{ algebraica} \implies [Y] \text{ es una clase de Hodge.}$$

Conjetura de Hodge

¿Toda clase racional de Hodge proviene de subvariedades algebraicas?

$$H^{k,k}(X) \cap H^{2k}(X, \mathbb{Q}) = \langle [Y] : \text{codim}(Y) = k \rangle_{\mathbb{Q}}.$$

